معادلات دیفرانسیل

معادلات مرتبه اول خاص

۱- جداپذیر:
$$y'=f(x)g(y)\to\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx\to\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)d(x)\to G(y)=F(x)+C$$

مثال:

$$y'=xe^{x^2-y}\to y'e^y=xe^{x^2}\to\int e^y dy=\int xe^{x^2}dx\quad\to\quad e^y=\frac{1}{2}e^{x^2}+c\to y=\ln\left(c+\frac{1}{2}e^{x^2}\right)$$

۲- معادلات درجه صفر:
$$y'=f(x,y)=f(kx,ky)$$

این گونه معادلات با تغییر متغیر $\frac{y}{x}=u$ به معادله جداپذیر که در مورد قبلی ذکر شد، تبدیل می‌شوند:

$$y=ux\to y'=u'x+u=f(x,ux)=f(1,u)\to u'x=f(1,u)-u$$ (معادله جداپذیر)

$$\to\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}\to\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln x+c\to H(u)=H\left(\frac{y}{x}\right)=\ln x+c$$

مثال:
$$y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{x+y}{x}$$

درجه صفر $\to u'x+u=e^u+1+u\to u'x=e^u+1$

$$\to\quad\frac{du}{e^u+1}=\frac{dx}{x}\quad\to\quad-\ln\left(1+e^{-u}\right)=\ln x+c$$

$$\to\quad-\ln\left(1+e^{-\frac{y}{x}}\right)=\ln x+c\to\quad x\left(1+e^{-\frac{y}{x}}\right)=C$$

۳- معادلات دوخطی (صورت و مخرج، یک خط هستند) $y'=\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)^n$

دو حالت دارد: ۱) دو خط موازی هستند؛ تغییر متغیر u=ax+by معادله را حل می‌کند.

۲) دو خط متقاطع هستند؛ تغییر متغیر $u=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ که $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ نقطه تلاقی دو خط است.

مثال:
$$y'=\frac{x+y-2}{x-y}$$
نقطه تلاقی: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow u=\frac{y-1}{x-1}$

$$\to\quad y-1=u(x-1)\quad\to\quad y'=u'(x-1)+u\quad\to\quad u'(x-1)+u=\frac{x+1+u(x-1)-2}{x-1-u(x-1)}=\frac{\cancel{(x-1)}(1+u)}{\cancel{(x-1)}(1-u)}$$

$$\to u'(x-1)=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{1+u^2}{1-u}$$ (معادله جداپذیر)

$$\to\int\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x-1}\to tg^{-1}\frac{y-1}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2\right)=\ln|x-1|+C$$

۴) دیفرانسیل کامل

معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ دیفرانسیل کامل است اگر $u(x,y)=c$ جواب معادله باشد.آنگاه داریم:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=dc=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=M\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=N\end{cases}\Rightarrow$$ شرط دیفرانسیل کامل: $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$

مثال: $ydx-xdy=0$ $\quad \frac{\partial(y)}{\partial y}-\frac{\partial(-x)}{\partial x}=1-(-1)=2\neq 0\rightarrow$ معادله کامل نیست

در این موارد، معادله را در عبارتی به نام فاکتور انتگرالساز (μ) ضرب می‌کنیم تا معادله کامل شود:

$$\mu ydx-\mu xdy=0\rightarrow\frac{\partial(\mu y)}{\partial y}-\frac{\partial(-\mu x)}{\partial x}=0\rightarrow\mu+y\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu+\frac{x\partial\mu}{\partial x}=0$$

فرض می‌کنیم تابع μ تنها تابعی از x باشد:

$$\mu=\mu(x)\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\mu}{\partial x}=\mu'\end{cases}\Rightarrow 2\mu+x\mu'=0\rightarrow\frac{\mu'}{\mu}=\frac{-2}{x}\rightarrow\ln\mu=-2\ln x\rightarrow\mu(x)=\frac{1}{x^2}$$

$\rightarrow$ معادله کامل: $\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy=0\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2}\rightarrow u=\dfrac{-y}{x}+g(y)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-1}{x}\rightarrow u=\dfrac{-y}{x}+h(x)\end{cases}\Rightarrow u=\frac{-y}{x}=C$

$\rightarrow y=cx$ یک خط گذرنده از مبدأ

۵- معادلات انتگرالی خاص

$$f(x)=g(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}h(t)f(x,t)dt$$

هدف: تعیین f(x)، روش حل: مشتق

نکته: $$\left(\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)dt\right)'=b'f(x,b)-a'f(x,a)+\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}dt$$

مثال: $f(x)=e+\int_1^x e^{2t}f(t)dt\rightarrow f(2)=?\quad ,\quad f'(x)=0+1\left(e^{2x}f(x)\right)\rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=e^{2x}\rightarrow\ln f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c$

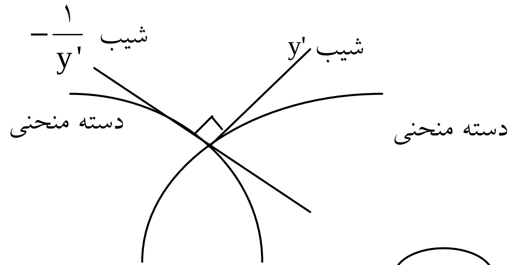
برای یافتن C نیاز به شرایط مرزی داریم. یک شرط مرزی در x=1 از خود معادله قابل دستیابی است:

$f(1)=e+\int_1^1 e^{2t}f(t)dt=e+0=e\rightarrow$ تابع از $\begin{pmatrix}1\\e\end{pmatrix}$ می‌گذرد

$$\rightarrow\ln e=\frac{1}{2}e^2+c\rightarrow c=1-\frac{1}{2}e^2\rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^2\right)+1}\rightarrow f(2)=e^{\frac{1}{2}(e^4-e^2)+1}$$

دسته منحنی‌های متعامد

فرض کنید جواب معادله $f(x,y,y')=0$، دسته منحنی $g(x,y,c)=0$ باشد. در این صورت جواب معادله $f(x,y,\frac{-1}{y'})=0$، دسته منحنی $h(x,y,c)=0$ می‌شود که g و h متعامدند.



مثال: مسیرهای قائم خانواده منحنی روبرو چیست؟ $xe^{cy}=1$

توجه: برای حل این گونه سؤالات ابتدا C را تنها کنید سپس مشتق بگیرید. در اینجا ابتدا از دو طرف Ln می‌گیریم و سپس حل می‌کنیم.

$$\ln x + cy = 0 \to \frac{\ln x}{y} + c = 0 \to \frac{\ln x}{y} = -c \to \frac{\frac{1}{x}y - y'\ln x}{y^2} = 0 \to$$ معادله قائم: $$\frac{\frac{1}{x}y - \frac{1}{-y'}\ln x}{y^2} = 0$$

$$\to \frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{y'} = 0 \to yy' + x\ln x = 0 \to \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^4}{4} = c$$

توجه در این معادله $x > 0$ است و نیازی به استفاده از قدر مطلق در $\ln|x|$ نیست.

استفاده از $\ln|x|$، دسته منحنی اضافه را وارد جواب‌ها می‌کند که در اینجا لازم نیست.

معادله مرتبه ۱ خطی:

فرم کلی: (ضریب بالاترین مرتبه حتماً ۱ باشد) $y' + a(x)y = b(x)$

تغییر متغیر لازم برای حل: $y = uv$

$$\to u'v + uv' + auv = b \qquad (v' + av)u + vu' = b$$

❊ u و v توابع دلخواه هستند؛ v را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که ضریب u صفر شود: $v' + av = 0$

❊ اگر b=0 باشد، معادله همگن نامیده می‌شود.

روش حل: ۱- معادله همگن را حل می‌کنیم (y_h)

۲- u' برابر معادله همگن را حل می‌کنیم. (یعنی فرض کرده‌ایم که $v=y_h$ است) و u را می‌یابیم.

۳- $y_p = uy_h$، جواب خصوصی را می‌یابیم.

٤- جواب عمومی $y = cy_h + y_p$

مثال:

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2e^x \quad , \quad y(1) = e - 1 \quad \Rightarrow \quad \ln_{x\to 0} \frac{y}{x^3} = ?$$

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x$$

معادله همگن $y' - \frac{2}{x}y = 0$ $$\ln y = 2\ln x \to y_h = x^2 \to u'x^2 = x^2e^x \to u' = e^x \to u = e^x \to y_p = uy_h = e^xx^2$$

$$\to \quad y = cx^2 + e^xx^2 = x^2(c + e^x) \quad \to \quad y(1) = -1 + e = c + e \quad \to \quad c = -1 \quad \to \quad y = x^2(e^x - 1)$$

$$\to \quad \lim_{x\to 0} \frac{y}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

حالت‌های منجر به معادله مرتبه ۱ خطی

۱) $$y' + ay = by^\alpha \qquad y^{-\alpha}y' + ay^{1-\alpha} = b \to v = y^{1-\alpha} \to v' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$$

$$\to \frac{v'}{1-\alpha} + av = b \to v' + a(1-\alpha)v = b(1-\alpha)$$:خطی مرتبه اول

۲) معادله خطی برحسب x

مثال: $$y' = \frac{1}{y + x} \quad , \quad y(0) = 1$$

حل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y+x}\rightarrow\frac{dx}{dy}=x+y\rightarrow x'-x=y$$

همگن $x'-x=0 \quad \rightarrow \quad x_h=e^y$

$$u'e^y=y \quad \rightarrow \quad u'=ye^{-y} \quad \rightarrow \quad u=-(y+1)e^{-y} \quad \rightarrow \quad x_p=-(y+1)$$

$$\rightarrow x=Ce^y-y-1 \ ; \quad 0=Ce-1-1 \quad \rightarrow \quad C=\frac{2}{e} \quad \rightarrow \quad x=\frac{2}{e}e^2-y-1$$

۳) معادله مرتبه دوم به فرم $\frac{d^2y}{dx^2}+f(y)=0$ (معادله موج ساده)

با تغییر متغیر $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$ قابل حل است.

٤) تغییر متغیر $z=g^{-1}(x)$ یا $x=g(z)$

در بعضی معادلات با این تغییر متغیر، به حالت‌های قابل حل توضیح داده شده می‌رسیم.

توجه داشته باشید که:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\Big/\frac{dx}{dz}\Rightarrow y'_x=\frac{y'_z}{g'_z}$$