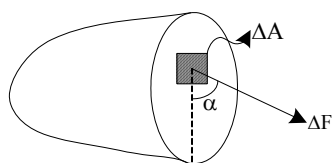


- تنش و کرنش:

- یادآوری تعاریف:

- تنش:



$$\begin{cases} \tau = \frac{\Delta F \cdot \cos \alpha}{\Delta A} & \text{تنش برشی} \\ \sigma = \frac{\Delta F \cdot \sin \alpha}{\Delta A} & \text{تنش عمودی (نرمال)} \end{cases}$$

- واحدها: واحدهای تنش همان واحدهای فشار می باشند. (Pa, KPa, MPa, ...)

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$$

$$1 \text{ kgf/cm}^2 = \frac{9.81 \text{ N}}{10^{-4} \text{ m}^2} \approx 10^5 \text{ Pa}$$

- کرنش: عبارتست از نسبت تغییر طول به طول اولیه. (کمیت بی بعد)

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

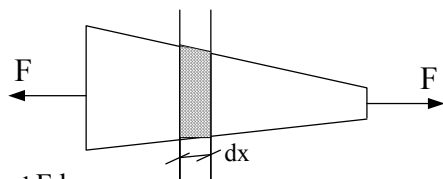
$$\sigma = E \epsilon$$



- قانون هوک:

که در آن E مدول یانگ است و به عنوان مثال برای فولاد $\frac{2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2}{(= 2 \times 10^5 \text{ MPa})}$ می باشد (هم واحد تنش)

- بیان دیگر قانون هوک:



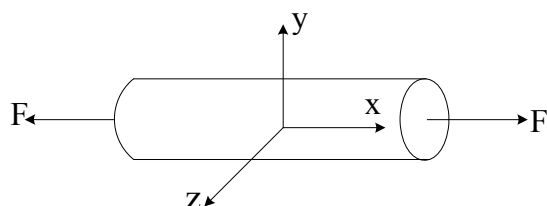
$$\delta = \int_0^L \frac{F dx}{EA}$$

$$\begin{cases} \sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow \delta = \frac{FL}{EA} \\ \sigma = E \epsilon \end{cases}$$

(برای میله با مقطع ثابت و نیروی ثابت)

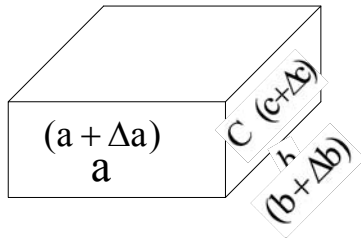
و در حالت کلی داریم:

- ضریب پواسون:



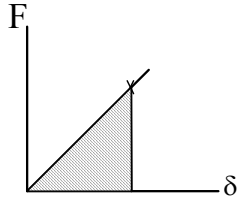
$$v = \frac{-\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{-\epsilon_z}{\epsilon_x} \Rightarrow \epsilon_y = \epsilon_z = -v \epsilon_x \quad (\text{ضریب پواسون})$$

- در مورد کرنش حجمی داریم:



$$\epsilon_v = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \Rightarrow \epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

- انرژی کرنش:



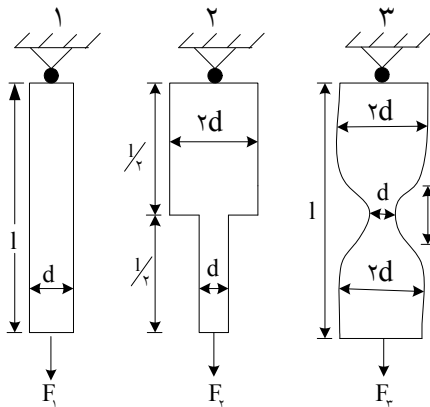
$$U = \frac{F\delta}{2} = \frac{F^2 L}{2EA} \quad \left(\delta = \frac{FL}{EA} \right)$$

نکته: روش جمع اثرها در این جا صادق نیست، چون انرژی با مجذور F رابطه دارد و رابطه شان خطی نیست.

- انرژی کرنش واحد حجم:

$$u = \frac{U}{V} \quad \text{انرژی} \quad \Rightarrow u = \frac{F^2}{2EA} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\epsilon\sigma}{2} = \frac{E\epsilon^2}{2} \quad (V = AL)$$

مثال: با فرض تنش مجاز یکسان برای هر ۳ میله، انرژی کرنش آنها را با هم مقایسه نمائید:



$$F_1 = F_2 = F_3 = (\sigma_{all}) \left(\pi \frac{d^2}{4} \right) = F$$

$$U_1 = \frac{F^2 l}{2EA}$$

$$U_2 = \frac{F^2 \left(\frac{l}{2} \right)}{2EA} + \frac{F^2 \left(\frac{l}{2} \right)}{2E \times \frac{\pi d^2}{16}} = \frac{5F^2 l}{16EA} = \frac{5}{8} U_1$$

$$U_3 \approx \frac{F^2 l}{2E \times \frac{\pi d^2}{8}} \approx \frac{1}{4} U_1$$

$$(a \ll l)$$

- مسائل هیپرستاتیکی (در نیروی محوری): در اینگونه مسائل مجهول اضافی را با حل معادله سازگاری تغییر شکل ها به دست می آوریم.

مثال: (کنکور ارشد ۷۵). برای سیستم نشان داده شده در نتیجه اعمال بار P کرنش در میله C برابر 5×10^{-4} حاصل گردیده است.

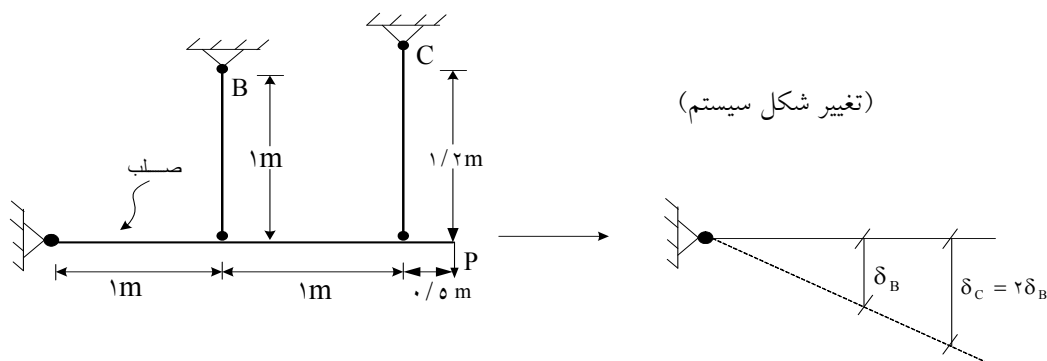
میزان تنش ایجاد شده در میله B برابر چند $\frac{N}{mm^2}$ است؟ $\left(E = 2 \times 10^5 \frac{N}{mm^2} \right)$

۲۴۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۱۰۰ (۲)

۶۰ (۱)

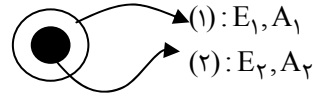
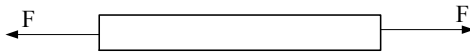


(تغییر شکل سیستم)



$$\delta_C = 2\delta_B, \quad \sigma_B = E\varepsilon_B = E \frac{\delta_B}{l_B} = E \frac{\delta_C}{l_C} = \frac{1}{2} E \frac{\delta_C}{l_C} = \frac{1}{2} E \varepsilon_C = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-4} = 50 \frac{N}{mm^2}$$

- میله‌های ۲ یا چند جنس (از حالات دیگر مسائل هیبر استاتیکی):



روی مرز بین دو جنس داریم: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

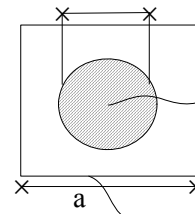
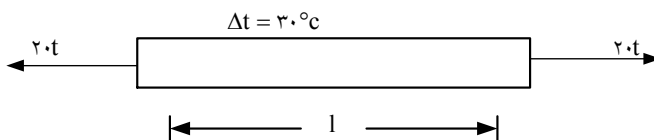
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} (*) \quad , \quad F = F_1 + F_2 = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 (**)$$

$$(*) , (**) \Rightarrow \sigma_1 = \frac{F}{A_2 + A_1 \frac{E_2}{E_1}} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_2 + A_1 \frac{E_1}{E_2}}$$

مقطع معادل از جنس ۱

مقطع معادل از جنس ۲

مثال: نیروی وارد بر فولاد و آلومینیوم را به دست آورید:



$$\begin{cases} d = 4 \text{ cm} \\ E_s = 2 \times 10^6 \\ \alpha_s = 11 \times 10^{-6} \\ a = 6 \text{ mm} \\ E_a = 0.7 \times 10^6 \\ \alpha_a = 23 \times 10^{-6} \end{cases}$$

(a) آلومینیوم

حل ✓

تغییر طول فولاد $\delta = \delta_a = \delta_s$ تغییر طول کل میله

تغییر طول آلومینیوم

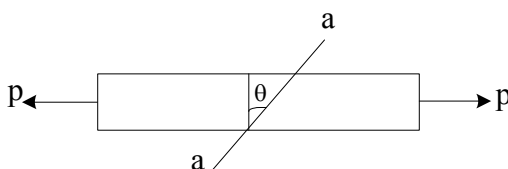
$$\Rightarrow \frac{F_a L}{E_a A_a} + \alpha_a L \Delta t = \frac{F_s L}{E_s A_s} + \alpha_s L \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{F_a \cancel{L}}{(0.7 \times 10^6)(36 - 4\pi)} + \cancel{L} \times 23 \times 10^{-6} \times 30 = \frac{F_s \cancel{L}}{(2 \times 10^6)(4\pi)} + \cancel{L} \times 11 \times 10^{-6} \times 30$$

$$\Rightarrow 0.398 F_s - 0.609 F_a = 36 \quad (*) \quad , \quad F_a + F_s = 200 \text{ Kg} \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow F_s = 15670 \text{ Kg} \quad , \quad F_a = 4330 \text{ Kg}$$

- تنش وارد بر صفحه مایل در بارگذاری مموری:



$$\sigma_{a-a} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta$$

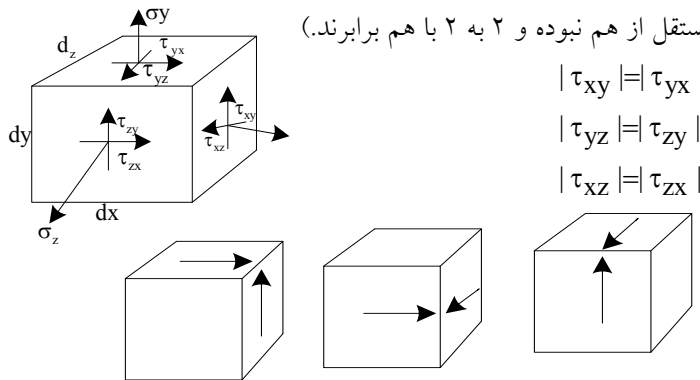
(A: سطح مقطع عمود بر محور عضو)

$$\tau_{a-a} = \frac{P}{2A} \sin 2\theta$$



با توجه به روابط فوق σ وقتی ماکزیمم است که صفحه مقطع عمود بر محور عضو باشد ($\theta = 0$) و مقدار آن برابر $\frac{P}{A}$ می باشد و وقتی تنش برشی τ ماکزیمم است که صفحه مقطع با صفحه قائم زاویه 45° بسازد و مقدار آن $\frac{P}{2A}$ است (یعنی نصف مقدار ماکزیمم تنش قائم)

- **تانسورهای تنش:** به طور کلی هر المان از یک جسم که تحت اثر نیرو قرار دارد ۹ مؤلفه تنش دارد که ۳ تای آنها تنش های قائم و ۶ تای آنها تنش های برشی هستند (که البته این تنش های برشی مستقل از هم نبوده و ۲ به ۲ با هم برابرند).



- به هر کدام از حالات زیر یک برش خالص می گویند:

نکته: اگر المان تحت برش خالص را 45° بچرخانیم، تنش عمودی (σ) ماکزیمم و برش صفر خواهد شد.

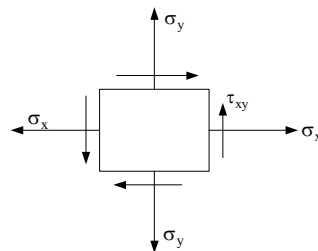


نکته: برش خالص طول اضلاع را تغییر نمی دهد.

$$\gamma = \frac{T}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- کرنش برشی:

- روابط دایره مور:



$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

در حالتی که σ_x و σ_y هم علامت باشند:

در حالتی که σ_x و σ_y مختلف علامت باشند:

برای کرنش ها نیز داریم:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \max(|\sigma_{\max}|, |\sigma_{\min}|)$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

$$\epsilon_{\max, \min} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

- انبساط حجمی: برای المانی که تحت تنش های σ_x ، σ_y و σ_z است داریم: $\epsilon_v = \frac{\Delta v}{v} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

* در حالت خاص که جسم تحت اثر فشار هیدرواستاتیک P قرار گرفته باشد (یعنی $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$)

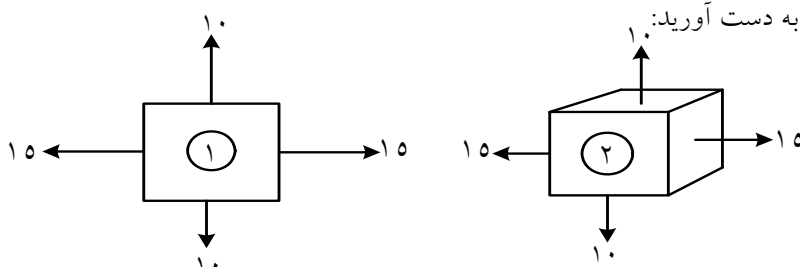
$$\epsilon_v = -\frac{3(1-2\nu)P}{E} = -\frac{P}{K}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

داریم:

(k مدول حجمی ماده است که با E هم دیمانسیون است)



مثال: مقدار تنش برش حداکثر در دو حالت زیر را به دست آورید:





۱: المان دو بعدی است و چون تنش برشی نداریم، پس تنش‌های نشان داده شده تنش‌های حداکثر و حداقل (اصلی) هستند پس:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(15 - 10) = 2.5$$

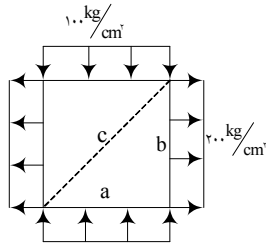
۲: المان ۳ بعدی است و چون تنش برشی نداریم، تنش‌های نشان داده شده تنش‌های اصلی هستند، با این تفاوت که این بار تنش حداقل،

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(15 - 0) = 7.5$$

تنش در بعد سوم، یعنی صفر است، پس:



مثال: (کنکور ارشد ۸۳) - صفحه مربع شکل به اضلاع ۱۰ سانتی متر تحت تأثیر تنش‌های σ_x و σ_y مطابق شکل قرار دارد. تغییر



طول قطر صفحه چقدر است؟ ($\nu = 0.3$, $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)



$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{200 + 0.3 \times 100}{E} = \frac{230}{E} \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{-100 - 0.3 \times 200}{E} = -\frac{160}{E}$$

$$\Rightarrow \Delta a = a\epsilon_x = 10 \times \frac{230}{E}, \quad \Delta b = b\epsilon_y = -10 \times \frac{160}{E}$$

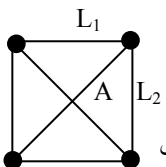
نکته: از بسط رادیکال، $\sqrt{1+\epsilon} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ ، ثابت می‌شود:



$$\Delta C = \frac{(\text{تغییر طول ضلع کوچک}) \Delta a + (\text{تغییر طول ضلع بزرگتر}) \Delta b}{(\text{طول اولیه قطر}) C}$$

$$\Rightarrow \Delta c = \frac{\frac{230}{E} \times 10 + \left(-\frac{160}{E}\right) \times 10}{10 \times \sqrt{2}} = \frac{49/497}{E} = 2/47 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

مثال: (کنکور ارشد ۸۳): در شکل روبرو، جنس و سطح مقطع میله‌ها یکی است. دو میله مایل در A بهم اتصالی ندارند. در اثر



(۲) در تمام میله‌ها تنش فشاری

(۴) در میله‌های مایل فشار و در بقیه میله‌ها کشش

افزایش درجه حرارت چه تنشی در میله‌ها به وجود می‌آید؟

(۱) تنش ایجاد نمی‌شود

(۳) در میله‌های مایل کشش و در بقیه میله‌ها فشار

حل از تحلیل سازه‌ها به خاطر داریم:



$$n = m + r - 2j$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 گره‌ها قیدها تعداد اعضا

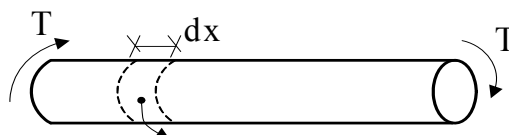
$$n = 6 + 0 - 2 \times 4 = -2$$

سازه فوق نامعین نیست. پس آزادانه تغییر شکل می‌دهد. گزینه ۱ درست است.

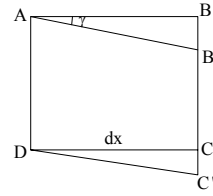
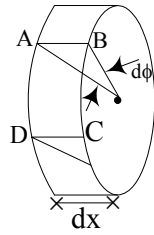


نکته: در سازه‌های معین، تغییرات درجه حرارت، نشست‌های تکیه‌گاهی و نقص ساخت اعضای سازه در سازه تنش ایجاد نمی‌کند.

- پیچش:



- یادآوری تعاریف:



$$\overline{BB'} = \overline{CC'} = R d\phi$$

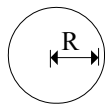
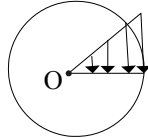
$$\gamma = \frac{\overline{BB'}}{dx} = R \frac{d\phi}{dx}$$

$$\tau = G\gamma = GR \frac{d\phi}{dx}$$

- تنش برش در مقطع تحت پیچش به صورت خطی تغییر می کند.

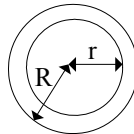
- در هر نقطه از مقطع دایروی داریم:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$



$$J = \frac{\pi R^4}{2}$$

و



$$J = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4)$$

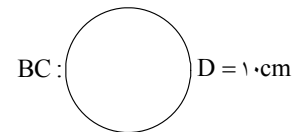
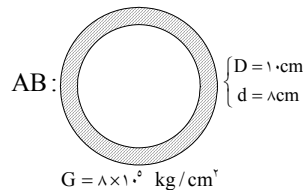
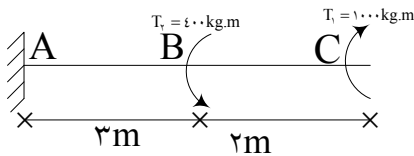
و از استاتیک به خاطر داریم:

و میزان پیچش در هر نقطه از رابطه $\phi = \int \frac{T dx}{GJ}$ به دست می آید، که برای میله با سطح مقطع ثابت و لنگر ثابت داریم: $\phi = \frac{TL}{GJ}$

- مقاومت دو مقطع تحت پیچش به نسبت عکس تنش هاست (با لنگرهای مساوی) و به نسبت لنگرهاست (با تنش های مساوی)



مثال: مطلوبست، محاسبه تنش برشی، ماکزیمم و دوران مقاطع B و C؟



حل از تعادل لنگرها داریم: $T_A = 600 \text{ kg.m}$

$$\Rightarrow T_{AB} = 600 \text{ kg.m} \quad , \quad T_{BC} = 1000 \text{ kg.m}$$

$$J_{AB} = \frac{\pi}{2} (D^4 - d^4) = 579/6 \text{ cm}^4 \quad , \quad J_{BC} = \frac{\pi}{2} D^4 = 981/7 \text{ cm}^4$$

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{\max})_{BC} &= \frac{TR}{J} = \frac{600 \times 1000 \times 5}{579/6} = 517/6 \text{ kg/cm}^2 \\ (\tau_{\max})_{BC} &= \frac{TR}{J} = \frac{1000 \times 1000 \times 5}{981/7} = 509/3 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_{\max} = 517/6 \text{ kg/cm}^2$$

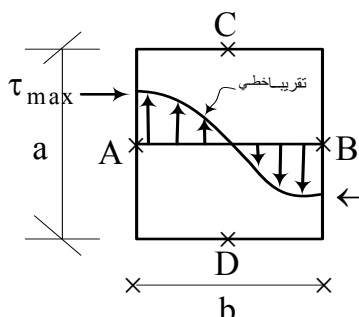
$$\phi_B = \phi_{AB} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{G J_{AB}} = \frac{600 \times 1000 \times 300}{8 \times 10^5 \times 579/6} = 388 \times 10^{-4} \text{ (rad)}$$

$$\phi_{B/C} = \frac{T_{BC} L_{BC}}{G J_{BC}} = \frac{1000 \times 1000 \times 200}{8 \times 10^5 \times 981/7} = 255 \times 10^{-4} \text{ (rad)} \Rightarrow \phi_C = \phi_B + \phi_{B/C} = (388 + 255) \times 10^{-4} = 643 \times 10^{-4} \text{ (rad)}$$

- پیچش در مقطع مربع مستطیل:

تنش های برش در وسط اضلاع بزرگتر، بیشترین مقدار را دارند

همچنین در ۵ نقطه مقطع (۴ گوشه و مرکز)، مقدار تنش، صفر است.



$$(\tau_{\max})_{A,B} = \frac{T}{\alpha ab^2}$$

$$(a > b)$$



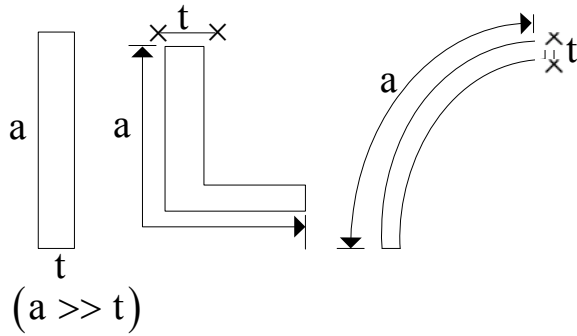
که α از جداول به دست می آید ولی مقدار آن به ازای مقادیر

$\frac{a}{b}$ بزرگتر از ۱۰، ۱/۳ می باشد. به عنوان مثال برای

تمامی مقاطع روبرو داریم:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\frac{1}{3}at^2}, \quad J = \frac{1}{3}at^3$$

مقاطع روبرو، مقاطع جدار نازک باز محسوب می گردند.



- پیش در مقاطع جدار نازک بسته:

$$\tau = \frac{T}{2A_m t} \quad (t \text{ ضخامت مقطع})$$

و در هر نقطه از مقطع داریم: ثابت $t \times T =$

A_m : مساحت متوسط

L_m : محیط متوسط

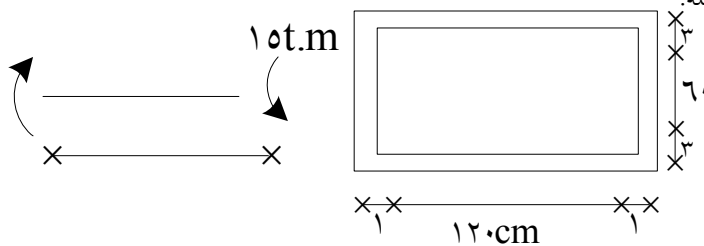
پس با زیاد شدن ضخامت، تنش کاهش می یابد و بالعکس، در حالی که در مقاطع جدار نازک باز، با زیاد شدن ضخامت مقطع، تنش افزایش

$$\rightarrow J_t = \frac{4A_m^2 t}{L_m} \quad \text{اگر } \phi = \int \frac{T dx}{GJ_t}, \quad J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}} \rightarrow t =$$

می یابد و بالعکس.



مثال: مطلوبست محاسبه تنش در مقطع و زاویه پیچیدگی میله:



$$(G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2)$$



$$\tau = \frac{T}{2A_m t}, \quad A_m = 121 \times 63 = 7623 \text{ cm}^2$$

$$\tau_1 = \frac{10 \times 10^5}{2 \times 7623 \times 1} = 65/60 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{جدار قائم})$$

$$\tau_2 = \frac{10 \times 10^5}{2 \times 7623 \times 3} = 21/86 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{جدار افقی})$$

$$J_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}, \quad \oint \frac{ds}{t} = 2 \left(\oint_0^{121} \frac{ds}{3} + \oint_0^{63} \frac{ds}{1} \right) = 206/7 \Rightarrow J_t = \frac{4 \times 121^2 \times 63^2}{206/7} = 1012 \times 10^6$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{TL}{GJ_t} = \frac{10^6 \times 300}{8 \times 10^5 \times 1012 \times 10^6} = 335 \times 10^{-6} \text{ (rad)}$$

نکته: اگر سطح مقطع مدور باشد (دایره یا حلقه)، پس از پیش هم مسطح باقی می ماند ولی در سایر مقاطع، پس از پیش، تاب خوردگی یا طبله کردن (Warping) خواهیم داشت.

نکته: مقاطع جدار نازک بسته، در پیش به مراتب قوی تر از مقاطع جدار نازک باز می باشند و کلاً بهینه ترین مقطع برای تحمل پیش مقطعی حلقوی است.

